Schnittpunkte von Funktionsgraphen

Von Max Ole Elliger und Leopold Otte

Um die Koordinaten der Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen zu ermitteln, muss man die **Funktionsterme gleichsetzen**. Häufig ergibt sich eine Gleichung, die man so umformen kann, dass eine algebraische Gleichung **(„Polynom gleich 0")** entsteht. (Nimmt man nun das entstandene Polynom als Funktionsterm einer neuen Hilfsfunktion, so gilt es nun, die Nullstellen dieser Funktion zu ermitteln.) Bei **Gleichungen dritten oder höheren Grades** muss man zuerst eine Lösung durch **Probieren** finden, um dann durch **Polynomdivison** zu einer Gleichung niedrigeren Grades zu kommen. Hat man so durch Wiederholen dieses Prinzips nur noch eine **Gleichung zweiten Grades**, so kann man mit der Lösungsformel zum Lösen quadratischer Gleichungen die restlichen Lösungen finden. Die nun gefundenen Lösungen stellen die **x-Koordinaten** der Schnittpunkte der ursprünglichen Funktionsgraphen dar. Setzt man diese Werte in eine der **ursprünglichen Funktionsgleichungen** ein, erhält man die **y-Koordinaten der Schnittpunkte in Form von Funktionswerten.**

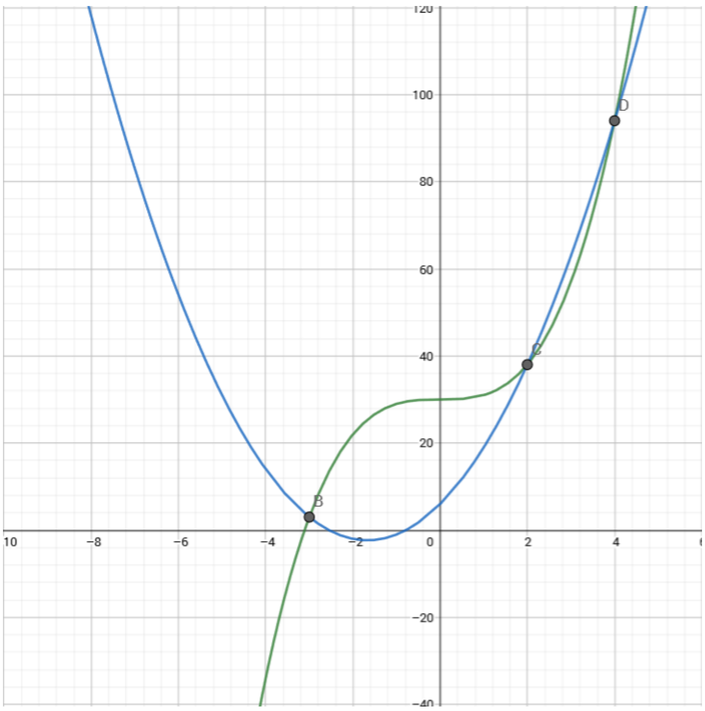
Beispiel 1.:	**Vorgehensweise:**
$\mathbf{f(x)=3x^2+10x+6;\ g(x)=x^3+30}$	Gegeben sind die Gleichungen der Funktionsgraphen
$3x^2+10x+6 = x^3+30$	Gleichsetzen der Funktionsterme
$3x^2+10x+6 = x^3+30 \quad \vert -(3x^2+10x+6)$ $x^3-3x^2-10x+24=0$	Umformen zu einer Algebraischen Gleichung („Polynom gleich 0")

x=2 einsetzen: $2^3 - 3 \times 2^2 - 10 \times 2 + 24 = 0$ ➔ $x_1=2$ ➔ $x^3-3x^2-10x+24$ ist durch x-2 teilbar.	Bestimmen der Lösungen dieser Gleichung (ab 3. Grad durch Probieren, am besten mit „kleinen Zahlen“ wie z.B. -2;-1;-0,5;0;0,5;1;2 usw. eine Lösung finden, dann durch Polynomdivision weitere Lösungen finden)
$(x^3 \quad -3x^2 \quad -10x \quad +24) : (x-2) = x^2 \quad -x \quad -12$ $-(x^3 \quad -2x^2)$ $(-x^2 \quad -10x)$ $-(-x^2 \quad +2x)$ $(-12x \quad +24)$ $-(-12x \quad +24)$ 0	Polynomdivision (wie angekündigt)
Faktorisieren des Polynoms: $x^3-3x^2-10x+24 = (x-2)(x^2-x-12)$	Daraus folgt, dass sich das Polynom auch so darstellen lässt.
$x^2-x-12= 0$	Nun müssen für $x^2-x-12= 0$ Lösungen gefunden werden.
$X_{2,3}= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-12)}}{2 \times 1}$ $= \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2}$ ➔ $x_2= 4$ ➔ $x_3=-3$ Faktorisieren der ursprünglichen algebraischen Gleichung: $(x-2)(x-4)(x+3)=0$	Finden von Lösung mit Hilfe der Lösungsformel zum Lösen quadratischer Gleichungen

➔ Die Graphen G_f und G_g haben insgesamt drei Schnittpunkte bei den x-Koordinaten mit
$x_1=2$; $x_2=4$; $x_3=-3$

Man ermittelt die zugehörigen y-Koordinaten, indem man die entsprechenden Funktionswerte einer der gegebenen Funktionen berechnet.

$g(x)= x^3+30$ $g(2)= 2^3+30=38$ $g(4)= 4^3+30=94$ $g(-3)= (-3)^3+30=3$	Berechnung der gesuchten Funktionswerte
➔ $S_1(2\|38)$ ➔ $S_2(4\|94)$ ➔ $S_3(-3\|3)$	Benennung der Schnittpunkte



Beispiel 2

$$\boldsymbol{f(x) = 2(x-2)^2 + 4\,;\; g(x) = 4x - 6}$$

$2(x-2)^2 + 4 = 4x - 6$ →Gleichsetzen

$2x^2-8x+8+4=4x-6\ |-(4x-6)$ →Umformen

$2x^2-12x+18=0$ →Lösungen der Gleichung finden

$$x_{1/2}=\frac{12\pm\sqrt{12^2-4\cdot2\cdot18}}{2\cdot2}$$

$$x_{1/2}=\frac{12\pm0}{4}=3$$

Schnittpunkte: $S_{1/2}(3|g(3))$

(Doppelter) Schnittpunkt ohne Vorzeichenwechsel

→ $S_{1/2}(3|g(3))$ ist ein Berührpunkt beider Graphen.

$g(3)=4\cdot3-6=6$

Schnittpunkt/Berührpunkt: $S_1(3|6)$