Ganzrationale Funktionen

(Zusammenfassung von Robert Neag und Taner Cakir)

Definition:

Ganzrationale Funktionen sind Funktionen, deren Funktionsterm ein Polynom ist. Die Definitionsmenge ist die Menge der reelen Zahlen.

Arten von Ganzrationalen Funktionen:

a) Lineare Funktionen; Funktionen der Form $g(x) = m \cdot x+t$; z.B.: $f(x)= 3x+2$
b) Quadratische Funktionen; Funktionen der Form $h(x) = ax^2+bx+c$; z.B.: $f(x)= x^2+2x+1$
c) Ganzrationale Funktionen höheren Grades; Funktionen vom Grad n der Form $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+ \ldots + a_1x + a_0$ $(a_n \neq 0)$; z.B.: $f(x)= 0{,}25x^3+0{,}25x^2-2x-3$ ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades.

Bestimmung der Nullstellen:

a) Lineare Funktionen -> Äquivalenzumformung;
Beispiel: $3x+2 = 0 \quad |-2$
$3x = -2 \quad | :3$
$x = -\frac{2}{3}$

b) Quadratische Funktionen -> Lösungsformel für Quadratische Gleichungen
$x^2+2x+1 = 0$
$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1} = \frac{-2\pm0}{2}$ => $x_1 = -1$; $x_2 = -1$

c) Ganzrationale Funktionen:
1.Eine Nullstelle durch Probieren herausfinden
2.Polynomdivision ausführen
3.Falls eine quadratische Gleichung entsteht:
Lösungsformel für quadratische Gleichungen anwenden
Falls nicht:
Schritt 1 und 2 so lange wiederholen bis eine quadratische Gleichung entsteht
4.Faktorisieren; allg. Form: $f(x)= a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots$

Beispiel: $f(x) = 0{,}25x^3+0{,}25x^2-2x-3=0$; Probieren liefert : $x_1=3$

➔ Polynomdivision:
$(0{,}25x^3+0{,}25x^2-2x-3) : (x-3) = 0{,}25x^2+x+1$
$\underline{-(0{,}25x^3-0{,}75x^2)}$
x^2-2x
$\underline{-(x^2-3x)}$
$x-3$
$\underline{-(x-3)}$
0

$$x_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot0{,}25\cdot1}}{2\cdot0{,}25}$$

Zusammenfassung: $f(x)=0{,}25x^3+0{,}25x^2-2x-3$ hat die Nullstellen $x_1=3$, $x_2=-2$ und $x_3=-2$

Faktorisierung: $f(x)=0{,}25(x-3)(x+2)^2$

G_f hat bei x = 3 eine einfache Nullstelle mit Vorzeichenwechsel

G_f hat eine doppelte Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel bei x= -2

- ➔ G_f hat an der Stelle x = -2 einen Extrempunkt auf der x-Achse

Weitere Arten von Nullstellen:

Bei Nullstellen mit ungerader Vielfachheit handelt es sich um Schnittpunkte mit der x-Achse.

Bei Nullstellen mit gerader Vielfachheit handelt es sich um Berührpunkte mit der x-Achse.

Verhalten im Unendlichen:

Es überwiegt der Summand mit der größten Potenz von x ($a_n x^n$...).

In dem obigen Beispiel ist das $0{,}25x^3$.

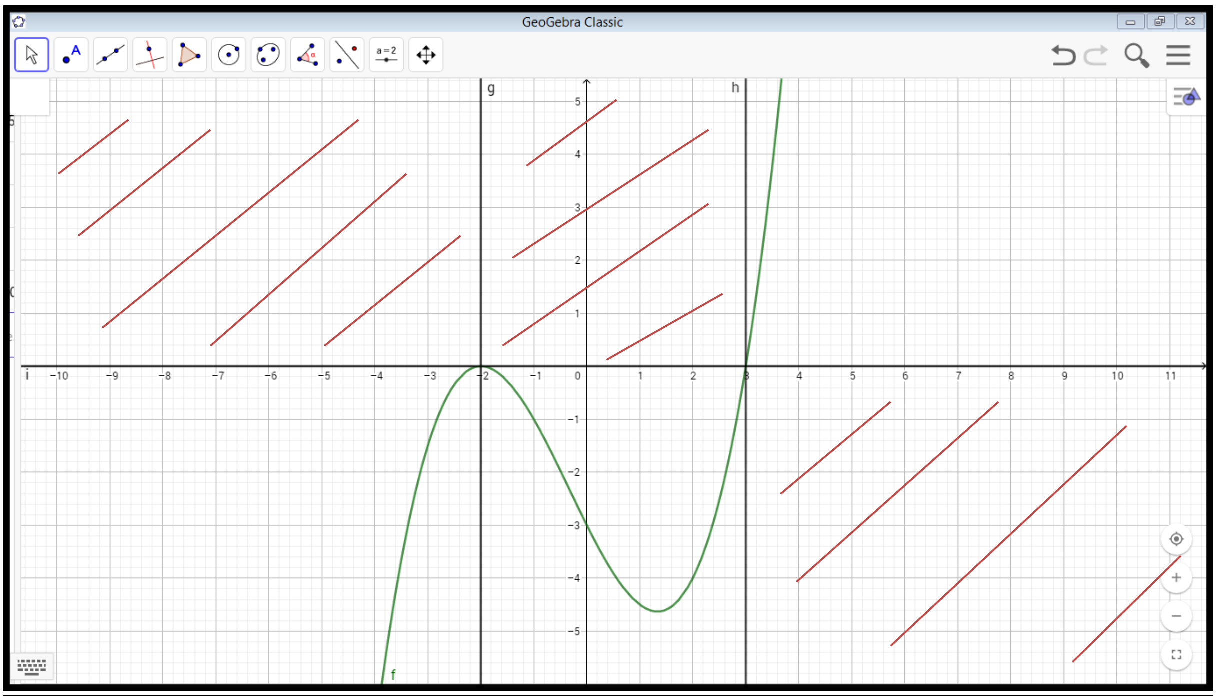
Fallunterscheidung:

	n gerade	n ungerade
$a_n > 0$	G_f kommt im Koordinatensystem von „links oben“ und verschwindet nach „rechts oben“	G_f kommt im Koordinatensystem von „links unten“ und verschwindet nach „rechts oben“
$a_n < 0$	G_f kommt im Koordinatensystem von „links unten“ und verschwindet nach „rechts unten“	G_f kommt im Koordinatensystem von „links oben“ und verschwindet nach „rechts unten“

Zeichnen des Graphen („Felder abstreichen"):

Beispiel: $f(x) = 0{,}25x^3+0{,}25x^2-2x-3$

G_f:



Die Geraden g, h und i unterteilen das Koordinatensystem in 6 Felder.

Um G_f zu skizzieren streicht man nach dem Ausschlussprinzip zunächst alle Felder weg, durch die G_f nicht verläuft. Da „a_n" in diesem Beispiel größer als 0 ist und „n" ungerade ist, fallen das linke obere Feld und das rechte untere Feld weg. Zusätzlich muss der Graph deswegen von links unten kommen und nach rechts oben verschwinden. Aufgrund der doppelten Nullstelle bei $x = -2$, fällt das mittlere obere Feld ebenfalls weg. Da G_f bei $x = 3$ eine einfache Nullstelle besitzt, muss der Graph durch das rechte obere Feld verlaufen und somit nach rechts oben verschwinden. Mit dieser Methode kann man G_f skizzieren.