11. Jahrgangsstufe
Mathematik
Arbeitsplan: Ableiten ganzrationaler Funktionen

BASISAUFGABEN

Bearbeiten Sie aus dem Aufgabenangebot so viele Basisaufgaben wie Sie für nötig erachten. Überprüfen und korrigieren Sie Ihre Lösungen und dokumentieren Sie Ihren Erfolg auf diesem Blatt.

Aufgabenangebot: S. 53/ 2, nur Aufgabenstellung (1)
S. 53/ 3
S. 53/ 4, Änderung: „Geben Sie jeweils zwei Funktionen an, …“

Bearbeitete Aufgaben	Lösung überprüft richtig / falsch / verbessert	Klärungsbedarf

STANDARDAUFGABEN

Bearbeiten Sie die Pflichtaufgaben im angegebenen Umfang. Überprüfen und korrigieren Sie Ihre Lösungen und dokumentieren Sie Ihren Erfolg auf diesem Blatt. Sollten Sie weitergehenden Übungsbedarf feststellen könne Sie aus dem zusätzlichen Aufgabenangebot nach eigenem Ermessen auswählen. Überprüfen und korrigieren Sie auch in diesem Fall Ihre Lösungen und dokumentieren Sie Ihren Erfolg auf diesem Blatt.

Pflichtaufgaben: S. 77/ 12b, d
S. 77/ 13b, d
S. 53/ 5

Bearbeitete Aufgaben	Lösung überprüft richtig / falsch / verbessert	Klärungsbedarf

Zusätzliches Aufgabenangebot: S. 77/ 12 a, c
S. 77/ 13a, c
S. 77/ 10

Bearbeitete Aufgaben	Lösung überprüft richtig / falsch / verbessert	Klärungsbedarf

EXPERTENAUFGABEN

Wenn Sie die Standardaufgaben ohne weitere Probleme bearbeiten konnten, sollten Sie sich auch an folgende Aufgaben wagen. Überprüfen und korrigieren Sie Ihre Lösungen und dokumentieren Sie Ihren Erfolg auf diesem Blatt.

S. 53/ 6
S. 53/ 7

Bearbeitete Aufgaben	Lösung überprüft richtig / falsch / verbessert	Klärungsbedarf

Lösungen zur Selbstkontrolle

S. 53/ 2

a) $f(x) = 2x^2 + x^3$

(1) $f'(x) = 2 \cdot 2x + 3x^2 = 4x + 3x^2$

(2) $f'(x) = 2x(2 + x) + x^2(0 + 1) = 4x + 2x^2 + x^2 = 4x + 3x^2$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

(1) $f'(x) = 2x - 2 \cdot 1 = 2x - 2$

(2) $f'(x) = (1 - 0)(x - 1) + (x - 1)(1 - 0) = x - 1 + x - 1 = 2x - 2$

c) $f(x) = x^3 + x^2 - x$

(1) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

(2) $f'(x) = 1 \cdot (x^2 + x - 1) + x(2x + 1 - 0) = x^2 + x - 1 + 2x^2 + x = 3x^2 + 2x - 1$

d) $f(x) = [(x + 2)(x - 2)]^2 = (x^2 - 4)^2 = x^4 - 8x^2 + 16$

(1) $f'(x) = 4x^3 - 8 \cdot 2x + 0 = 4x^3 - 16x$

(2) $f(x) = (x^2 - 4)(x^2 - 4)$

$f'(x) = (2x - 0)(x^2 - 4) + (x^2 - 4)(2x - 0) = 2x^3 - 8x + 2x^3 - 8x = 4x^3 - 16x$

oder: Produktregel mit 4 Faktoren:

$f(x) = (x + 2)(x + 2)(x - 2)(x - 2)$

$f'(x) = (1 + 0)[(x + 2)(x - 2)(x - 2)] + (x + 2)\{(1 + 0)(x - 2)(x - 2) + (x + 2)[(1 - 0)(x - 2)$
$+ (x - 2)(1 - 0)]\} =$

$= (x + 2)(x - 2)(x - 2) + (x + 2)\{(x - 2)^2 + (x + 2)[x - 2 + x - 2]\} =$

$= (x^2 - 4)(x - 2) + (x + 2)\{x^2 - 4x + 4 + (x + 2)(2x - 4)\}$

$= x^3 - 2x^2 - 4x + 8 + (x + 2)\{x^2 - 4x + 4 + 2x^2 - 4x + 4x - 8\} =$

$= x^3 - 2x^2 - 4x + 8 + (x + 2)(3x^2 - 4x - 4) =$

$= x^3 - 2x^2 - 4x + 8 + 3x^3 - 4x^2 - 4x + 6x^2 - 8x - 8 = 4x^3 - 16x$

e) $f(x) = x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = x^3 + 1$

(1) $f'(x) = 3x^2 + 0 = 3x^2$

(2) $f'(x) = (1 + 0)(x^2 - x + 1) + (x + 1)(2x - 1 + 0) = x^2 - x + 1 + 2x^2 - x + 2x - 1 = 3x^2$

f) $f(x) = x^3 - x^4$

(1) $f'(x) = 3x^2 - 4x^3$

(2) $f'(x) = 3x^2(1 - x) + x^3(0 - 1) = 3x^2 - 3x^3 - x^3 = 3x^2 - 4x^3$

S. 53/ 3

a) $F'(x) = 3x^2 - \frac{1}{2} \cdot 1 + 0 = 3x^2 - \frac{1}{2} = f(x)$

b) $F'(x) = (4x^2 - 16x + 16)' = 4 \cdot 2x - 16 \cdot 1 + 0 = 8x - 16 = 8(x - 2) = f(x)$

c) $F'(x) = 3x^2 + 3 \cdot 2x + 3 \cdot 1 = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x + 1)^2 = f(x)$

S. 53/ 4

Mögliche Beispiele ($D_f = \mathbb{R}$):

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 - 2$;

Probe: $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x + \frac{4}{3} \cdot 3x^2 - 0 = x + 4x^2$

b) $f(x) = 4x + 1$;

Probe: $f'(x) = 4 \cdot 1 + 0 = 4$

c) $f(x) = 3$;

Probe: $f'(x) = 0$

d) $f(x) = 2x + \frac{1}{4}x^2$;

Probe: $f'(x) = 2 \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2x = 2 + \frac{1}{2}x = 2 + 0{,}5x$

e) $f(x) = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 9$;

Probe: $f'(x) = 1 - 2x + \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = 1 - 2x + x^2 = (1 - x)^2$

f) $f'(x) = x^2 - 2x + 1$

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x$;

Probe: $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$

S. 53/ 5

$f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2 + x^3 + a$;

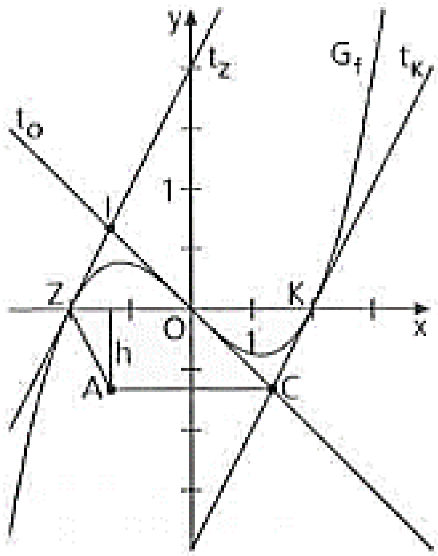
Probe: $f'(x) = 2 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 2x + 3x^2 + 0 = 2 - x + 3x^2$

a) $f(0) = 0$: $\quad 2 \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 + 0^3 + 0 = 0$; $a = 0$; $f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2 + x^3$

b) $f(2) = -3$: $\quad 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2^3 + a = -3$

$$\begin{aligned} 4 - 2 + 8 + a &= 3; \\ 10 + a &= 3; \\ a &= -7; \; f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2 + x^3 - 7 \end{aligned}$$

S. 53/ 6



$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$,
also ist G_f punktsymmetrisch zum Ursprung.

Schnittpunkte mit der x-Achse:
$f(x) = 0$; $x^3 - x = 0$; $x(x^2 - 1) = 0$; $x(x + 1)(x - 1) = 0$
Z (−1 | 0); O (0 | 0); K (1 | 0)
Tangenten: $f'(x) = 3x^2 - 1$
$m_Z = f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 1 = 2$, $y = 2x + t_1$
$0 = 2 \cdot (-1) + t_1$; $t_1 = 2$
t_Z: $y = 2x + 2$
$m_O = f'(0) = -1$; $y = -x + t_2$
$0 = 0 + t_2$; $t_2 = 0$
t_O: $y = -x$
$m_K = f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 1 = 2$; $y = 2x + t_3$
$0 = 2 \cdot 1 + t$; $t_3 = -2$
t_K: $y = 2x - 2$

Schnittpunkte von t_O und t_Z: $-x = 2x + 2$
$-3x = 2$
$x = -\frac{2}{3}$
$y = +\frac{2}{3}$
$I\left(-\frac{2}{3} \,\middle|\, \frac{2}{3}\right)$

Schnittpunkte von t_O und t_K: $-x = 2x - 2$
$-3x = -2$
$x = \frac{2}{3}$
$y = -\frac{2}{3}$
$C\left(\frac{2}{3} \,\middle|\, -\frac{2}{3}\right)$

a) $\overline{ZI} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{5}$
$\overline{IO} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$
Länge des Streckenzugs ZICK: $2 \cdot (\overline{ZI} + \overline{IO}) = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\sqrt{5} + \frac{2}{3}\sqrt{2}\right) = \frac{2}{3}(\sqrt{5} + 2\sqrt{2}) \approx 3{,}38$

b) $m_Z = 2 = m_K$, also $t_Z \parallel t_K$

c) $A_{ZACK} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AC} + \overline{ZK}) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{3} + 2\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$

S. 53/ 7

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

x-Achsenpunkte:

$-\frac{1}{2}x^2 + 2 = 0$; $\frac{1}{2}x^2 = 2$; $x^2 = 4$; $|x| = 2$

$S_1\,(-2\,|\,0)$, $S_2\,(2\,|\,0)$

y-Achsenpunkt:

$f(0) = 2$; $T\,(0\,|\,2)$

a) $A_{S_1S_2T} = \frac{1}{2} \cdot \overline{S_1S_2} \cdot y_T = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$

$\overline{OS_1} = \overline{OS_2} = \overline{OT} = 2$, also ist $O\,(0\,|\,0)$ der Mittelpunkt des Umkreises.

Der Umkreis hat die Radiuslänge $r = 2$.

$A_{Umkreis} = r^2\pi = 4\pi \approx 12{,}6$

$\frac{A_{S_1S_2T}}{A_{Umkreis}} = \frac{4}{4\pi} = \frac{1}{\pi} \approx 0{,}318 = 31{,}8\%$

b) $f'(x) = -\frac{1}{2} \cdot 2x + 0 = -x$

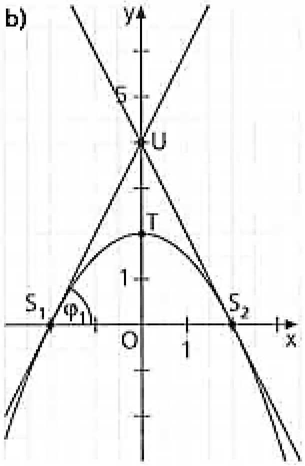
$m_1 = f'(-2) = 2$, $y = 2x + t$

$0 = 2 \cdot (-2) + t$; $t = 4$ $\quad t_1$: $y = 2x + 4$

$m_2 = f'(2) = -2$, $y = -2x + t^*$

$0 = -2 \cdot 2 + t^*$; $t^* = 4$ $\quad t_2$: $y = -2x + 4$

Schnittpunkt von t_1 und t_2: $U\,(0\,|\,4)$



$A_{S_1S_2U} = \frac{1}{2}\,\overline{S_1S_2} \cdot \overline{OU} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$

$\tan\varphi_1 = m_1 = 2$; $\varphi_1 \approx 63{,}4°$

$\sphericalangle\, S_2S_1U = \sphericalangle\, US_2S_1 \approx 63{,}4°$

$\sphericalangle\, S_1US_2 = 180° - 2 \cdot 63{,}4° = 53{,}2°$

c) ΔR_1R_2V ist gleichseitig, also gilt $\sphericalangle\, R_1R_2V = 60°$.

$m_I = \tan 60° = \sqrt{3}$

$f'(x) = \sqrt{3}$; $-x = \sqrt{3}$; $x = -\sqrt{3}$;

$f(-\sqrt{3}) = -\frac{1}{2}(-\sqrt{3})^2 + 2 = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2}$

Berührpunkt $B_I\,(-\sqrt{3}\,|\,\frac{1}{2})$

$y = m_I x + t_{II}$

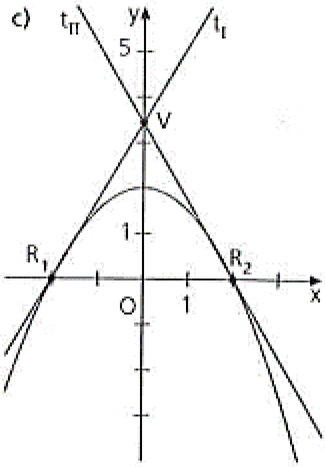
$\frac{1}{2} = \sqrt{3} \cdot (-\sqrt{3}) + t_I$; $t_I = \frac{1}{2} + 3 = 3{,}5$

t_I: $y = \sqrt{3}x + 3{,}5$

$\sqrt{3}x + 3{,}5 = 0$

$x = -\frac{3{,}5}{\sqrt{3}} = -\frac{7}{2\sqrt{3}} = -\frac{7}{6}\sqrt{3}$;

$R_1\,(-\frac{7}{6}\sqrt{3}\,|\,0)$, $R_2\,(\frac{7}{6}\sqrt{3}\,|\,0)$, $V\,(0\,|\,3{,}5)$



Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks: $a = \overline{R_1R_2} = 2 \cdot \frac{7}{6}\sqrt{3} = \frac{7}{3}\sqrt{3}$

$U_{R_1R_2V} = 3a = 3 \cdot \frac{7}{3}\sqrt{3} = 7\sqrt{3} = 12{,}1$

$A_{R_1R_2V} = \frac{a^2}{4}\sqrt{3} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{7}{3}\sqrt{3}\right)^2 \sqrt{3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{49}{9} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} = \frac{49}{12}\sqrt{3} \approx 7{,}1$

d) ΔQ_1Q_2W ist rechtwinklig und wegen der Symmetrie zur y-Achse auch gleichschenklig: $\sphericalangle\, Q_1Q_2W = 45°$

$m = \tan 45° = 1$

$f'(x) = 1$; $-x = 1$, $x = -1$;

$f(-1) = -\frac{1}{2}(-1)^2 + 2 = -\frac{1}{2} + 2 = 1{,}5$

Berührpunkt $B\,(-1\,|\,1{,}5)$

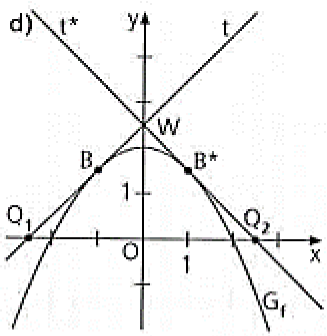
$y = mx + t_B$

$1{,}5 = 1 \cdot (-1) + t_B$; $t_B = 1{,}5 + 1 = 2{,}5$

t: $y = x + 2{,}5$

$x + 2{,}5 = 0$; $x = -2{,}5$;

$Q_1\,(-2{,}5\,|\,0)$, $Q_2\,(2{,}5\,|\,0)$, $W\,(0\,|\,2{,}5)$



$A_{Q_1Q_2W} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2{,}5 = 6{,}25$

$U_{Q_1Q_2W} = 5 + 2 \cdot \sqrt{2{,}5^2 + 2{,}5^2} = 5 + 2 \cdot \sqrt{2{,}5^2 \cdot 2} = 5 + 2 \cdot 2{,}5\sqrt{2} = 5 + 5\sqrt{2} =$

$= 5(1 + \sqrt{2}) = 12{,}1$

S. 77/ 10

10. $f(x) = x^2 - 4x + a;$

$f(0) = -5;\ a = -5$

$f(x) = x^2 - 4x - 5$

$f\colon f(x) = x^2 - 4x - 5;\ D_f = \mathbb{R}$

S. 77/ 12

a) $f(1) = 1$, $P\,(1 \mid 1)$

$f'(x) = 3x^2;\ m = f'(1) = 3;\ y = 3x + t$

$1 = 3 \cdot 1 + t;\ t = -2;\ t_P\colon y = 3x - 2$

Achsenpunkte: $S\,(\frac{2}{3} \mid 0)$, $U\,(0 \mid -2)$

$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{OS} \cdot \overline{OU} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$

b) $f(-1) = 0{,}5;\ P\,(-1 \mid 0{,}5)$

$f'(x) = 0{,}5 \cdot 4x^3 = 2x^3;\ m = f'(-1) = -2;\ y = -2x + t$

$0{,}5 = -2 \cdot (-1) + t;\ t = -1{,}5;\ t_P\colon y = -2x - 1{,}5$

Achsenpunkte: $S\,(-0{,}75 \mid 0)$, $U\,(0 \mid -1{,}5)$

$A = \frac{1}{2} \cdot 0{,}75 \cdot 1{,}5 = 0{,}5625$

c) $f(2) = 0{,}25 \cdot 2^2 = 1;\ P\,(2 \mid 1)$

$f'(x) = 0{,}25 \cdot 2x = 0{,}5x;\ m = f'(2) = 1;\ y = x + t$

$1 = 2 + t;\ t = -1;\ t_P\colon y = x - 1$

Achsenpunkte: $S\,(1 \mid 0)$, $U\,(0 \mid -1)$

$A = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$

d) $f(-2) = \frac{1}{32} \cdot (-2)^5 = -1;\ P\,(-2 \mid -1)$

$f'(x) = \frac{1}{32} \cdot 5x^4 = \frac{5}{32}x^4;\ m = f'(-2) = \frac{5}{32} \cdot 16 = 2{,}5;\ y = 2{,}5x + t$

$-1 = 2{,}5 \cdot (-2) + t;\ t = 4;\ t_P\colon y = 2{,}5x + 4$

$2{,}5x + 4 = 0;\ 2{,}5x = -4;\ x = -\frac{4}{2{,}5} = -1{,}6$

Achsenpunkte: $S\,(-1{,}6 \mid 0)$, $U\,(0 \mid 4)$

$A = \frac{1}{2} \cdot 1{,}6 \cdot 4 = 3{,}2$

S. 77/ 13

a) $f'(x) = 2x - 2$; $f'(x) = 2$; $2x - 2 = 2$; $2x = 4$; $x = 2$
$f(2) = -3$: Berührpunkt $(2 \mid -3)$

b) $f'(x) = 6x^2 - 3$; $f'(x) = 3$; $6x^2 - 3 = 3$; $6x^2 = 6$, $x^2 = 1$; $x_1 = -1$; $x_2 = 1$
$f(-1) = 1$; $f(1) = -1$: Berührpunkt $(-1 \mid 1)$, $(1 \mid -1)$

c) $f'(x) = 4x^3 - 4x$; $f'(x) = 0$; $4x^3 - 4x = 0$; $4x(x^2 - 1) = 0$
$4x(x + 1)(x - 1) = 0$; $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$
$f(-1) = -1$; $f(0) = 0$; $f(1) = -1$: Berührpunkte $(-1 \mid -1)$, $(0 \mid 0)$, $(1 \mid -1)$

d) $f'(x) = -4x$; $f'(x) = -2$; $-4x = -2$; $x = 0{,}5$
$f(0{,}5) = -2 \cdot 0{,}5^2 + 6 = -\frac{1}{2} + 6 = 5{,}5$: Berührpunkt $(0{,}5 \mid 5{,}5)$